

UNIDAD II: Los dos problemas fundamentales de la Geometría Analítica.

Primer problema fundamental

Dada una ecuación construir la grafica correspondiente, es decir, hallar el lugar geométrico que la represente. Este proceso también se le conoce como “discusión del lugar geométrico” y esta compuesto por los siguientes pasos:

1. Intersecciones con los ejes
2. Simetría
3. Extensión de la curva
- 4. Asíntotas**
5. Tabulación
6. Trazado de gráfica

Gráficas con asíntotas

En esta semana trabajaremos la discusión de lugares geométricos que tienen asíntotas. Tendremos dos tipos de asíntotas (aunque también existen asíntotas oblicuas, las cuales son rectas inclinadas a diferencia de las que veremos en esta semana de trabajo)

- Las **asíntotas verticales**, se obtienen de la extensión de la curva para “X”. Del despeje de “y” se consideran aquellos valores que hacen cero el denominador. Esos valores representaran la ubicación de las asíntotas verticales en el eje “x”.
- Las **asíntotas horizontales**, se deducen de la extensión de la curva para “Y”. Del despeje de “x” se consideran aquellos valores que hacen cero el denominador. Esos valores representaran la ubicación de las asíntotas horizontales en el eje “y”.

Observa la gráfica de la Figura 1.

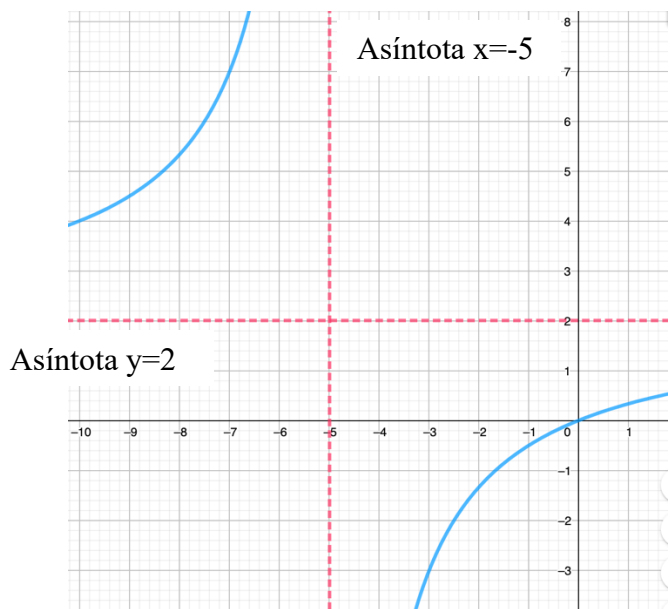


Fig. 1 Lugar geométrico donde aparecen asíntotas

La gráfica corresponde a la ecuación $xy - 2x + 5y = 0$, cuando despejamos a y y a x para calcular la extensión obtenemos:

$$\begin{aligned} xy - 2x + 5y &= 0 \\ xy + 5y &= 2x \\ y(x + 5) &= 2x \end{aligned}$$

$$y = \frac{2x}{x + 5}$$

$$\begin{aligned} xy - 2x + 5y &= 0 \\ xy - 2x &= -5y \\ x(y - 2) &= -5y \end{aligned}$$

$$x = \frac{-5y}{y - 2}$$

De las expresiones que quedaron, podemos darnos cuenta de que para el caso de $y = \frac{2x}{x+5}$, en el denominador $x \neq -5$, y para el caso de $x = \frac{-5y}{y-2}$, en el denominador $y \neq 2$.

Lo anterior es debido a que justo en esos valores $x = -5$ y $y = 2$ obtenemos una división entre cero, por tanto, son valores que NO se pueden tocar, gráficamente representan asíntotas.

Hay una asíntota vertical en $x = -5$ y una asíntota horizontal en $y = 2$

Ejemplo 1: Discusión del lugar geométrico.

Realiza la discusión del lugar geométrico para la siguiente ecuación $xy - 5x + 2y = 0$

Intersecciones

Intersección con eje X ($y = 0$)	Intersección con eje Y ($x = 0$)
$xy - 5x + 2y = 0$ $x(0) - 5x + 2(0) = 0$ $-5x = 0$ $x = \frac{0}{-5}$ $x = 0$	$xy - 5x + 2y = 0$ $(0)y - 5(0) + 2y = 0$ $2y = 0$ $y = \frac{0}{2}$ $y = 0$
∴ Intersección en $x = 0$	∴ Intersección en $y = 0$

Simetrías

Simetría con el eje x (y por $-y$)	Simetría con el eje y (x por $-x$)	Simetría con el origen (x por $-x$; y por $-y$)
$xy - 5x + 2y = 0$ $x(-y) - 5x + 2(-y) = 0$ $-xy - 5x - 2y = 0$	$xy - 5x + 2y = 0$ $(-x)y - 5(-x) + 2y = 0$ $-xy + 5x + 2y = 0$	$xy - 5x + 2y = 0$ $(-x)(-y) - 5(-x) + 2(-y) = 0$ $xy + 5x - 2y = 0$
Hay cambio en la ecuación, NO hay simetría respecto del eje x	Hay cambio en la ecuación, NO hay simetría respecto del eje y	Hay cambio en la ecuación, NO hay simetría respecto del origen

Extensión

Extensión en x Despejamos a y	Extensión en y Despejamos a x
$xy - 5x + 2y = 0$ $xy + 2y - 5x = 0$ $xy + 2y = 5x$ $y(x + 2) = 5x$ $y = \frac{5x}{x + 2}$	$xy - 5x + 2y = 0$ $xy - 5x = -2y$ $x(y - 5) = -2y$ $x = \frac{-2y}{y - 5}$
Analizamos la expresión para calcular la extensión (revisa el video y completa la sección)	Analizamos la expresión para calcular la extensión (revisa el video y completa la sección)

Asíntotas

Revisa el video y completa esta sección.

Asíntotas verticales	Asíntotas horizontales

Tabulación

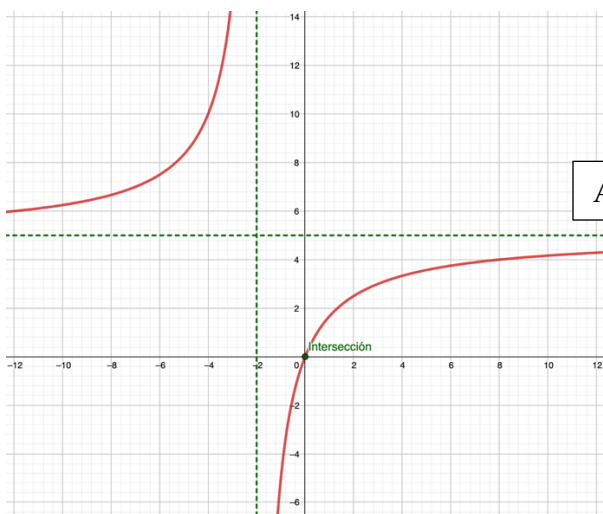
Consideramos la extensión de x para seleccionar los valores de x en la tabulación.

Recuerda que **NO SON VALORES CUALQUIERA, DEPENDEN DE LA EXTENSIÓN.**

$$(-\infty, -2) \cup (-2, \infty +)$$

x	$y = \frac{5x}{x+2}$
-8	6.67
-7	7
-6	7.5
-5	8.33
-4	10
-3	15
-2	$-\infty$
-3	15
-4	10
-5	8.33
-6	7.5
-7	7
-8	6.67

Gráfica



Asintota horizontal $y=5$

Asintota vertical $x=-2$

Actividad 4: Discusión del lugar geométrico

Realiza la discusión del lugar geométrico de las siguientes ecuaciones.

Escribe tus pasos de manera ordenada y tu gráfica constrúyela lo mejor posible (usa regla, al menos).

- I. $xy - 3x - 6 = 0$
- II. $xy + 2y + 4 = 0$
- III. $xy - 3y - x = 0$