

Unidad I: Conceptos preliminares

Antes de comenzar con nuestro curso es necesario preguntarnos ¿qué estudia la Geometría Analítica?

La geometría analítica estudia las líneas y figuras geométricas mediante la aplicación de técnicas básicas de álgebra en un determinado sistema de coordenadas. En consecuencia, la geometría analítica es una rama de las matemáticas que analiza en detalle todos los datos de las figuras geométricas, es decir, el volumen, los ángulos, el área, los puntos de intersección, sus distancias, entre otros.

La característica fundamental de la geometría analítica es que permite la representación de las figuras geométricas a través de fórmulas. Por ejemplo, las circunferencias son representadas por ecuaciones polinómicas de segundo grado mientras que las rectas son expresadas con ecuaciones polinómicas de primer grado.

La geometría analítica fue creada por el matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650) y el matemático y científico francés Pierre Fermat (1601-1665) a principios del siglo XVII.

La idea de que un punto puede ser correspondido a un par de números en un plano de coordenadas llevó a la geometría analítica de Descartes y Fermat a expresar todos los puntos de una figura en este sistema de coordenadas para analizar sus características, medidas y propiedades.

Actualmente, la geometría analítica tiene múltiples aplicaciones, más allá de las matemáticas y la ingeniería, pues ahora forma parte del trabajo de administradores para la planeación de estrategias y logística en la toma de decisiones.



Fig. 1 Creadores de la Geometría Analítica.

Sistema de coordenadas

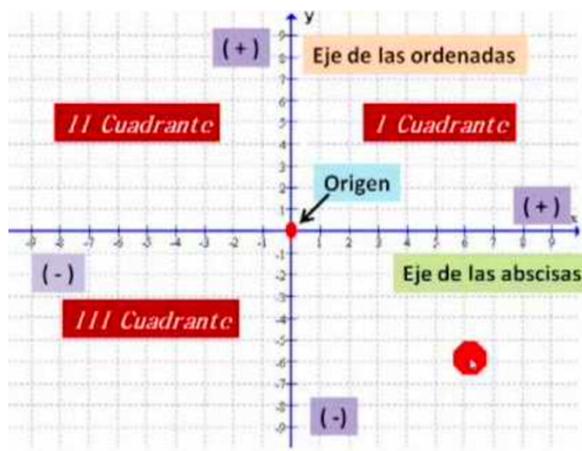


Fig. 2 Elementos del plano cartesiano.

El plano cartesiano son dos rectas perpendiculares que contienen a los números reales, dichas rectas son los ejes del plano; la recta horizontal corresponde al eje x o eje de las abscisas y la recta vertical corresponde al eje y o eje de las ordenadas.

Utilizamos un plano coordenado para mostrar la posición relativa en el espacio 2D.

Describimos cada punto en el plano con un par ordenado de la forma (x, y) , dichos puntos o pares ordenados pueden ubicarse en cualquiera de los cuadrantes (que son 4) o en los ejes, todo depende de la coordenada que se tenga.

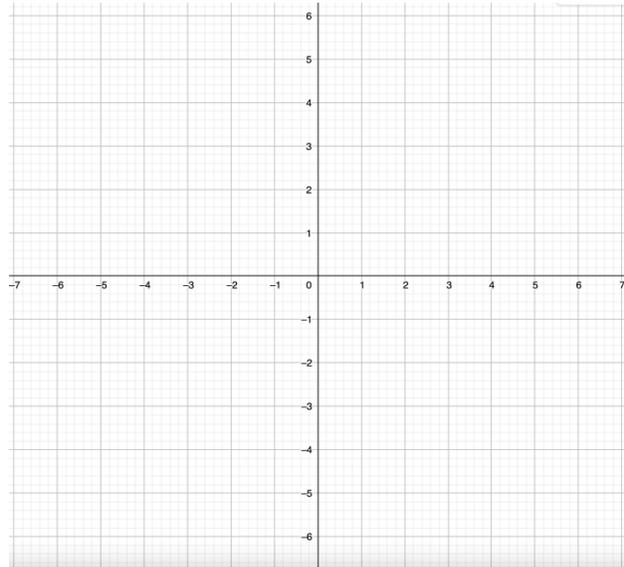
Localización de puntos en el plano cartesiano.

Para localizar puntos $P(x, y)$ en el plano, se considera como referencia el origen y a partir de este se desplaza hacia la derecha o izquierda y luego arriba o abajo dependiendo del signo de x y de y .

Ejemplo 1: Localización de pares ordenados en el plano cartesiano.

Localiza los siguientes puntos en el plano cartesiano y únelos.

$A(3, -2), B(2,1), C(5,2), D(2,3), E(3,6), F(0,4)$
 $G(-3,6), H(-2,3), I(-5,2), J(-2,1), K(-3, -2)$
 $L(0,0)$

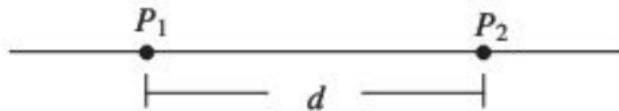


Distancia entre dos puntos

Es la longitud de un segmento de recta.

Unidimensional

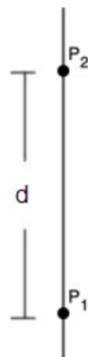
Dados los puntos $P_1(x_1)$ y $P_2(x_2)$ en la recta numérica:



La distancia que existe entre ellos se obtiene mediante la expresión:

$$d = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

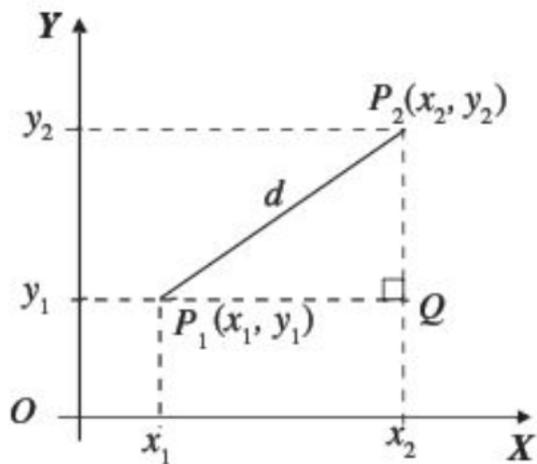
De modo análogo, si se tiene un segmento vertical y dados sus puntos $P_1(y_1)$ y $P_2(y_2)$ en la recta numérica:



$$d = |y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|$$

La distancia que existe entre ellos se obtiene mediante la expresión:

Bidimensional



Dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ puntos del plano, la distancia que existe entre ellos d se determina de la siguiente forma:

En el triángulo P_1QP_2 , por el teorema de Pitágoras

$$(\overline{P_1P_2})^2 = (\overline{P_1Q})^2 + (\overline{QP_2})^2$$

Recordando la distancia entre dos puntos de modo unidimensional

$\overline{P_1P_2} = d$, $\overline{P_1Q} = x_2 - x_1$ y $\overline{QP_2} = y_2 - y_1$ entonces, reemplazamos en el teorema del siguiente modo

$$(d)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo 2: Distancia unidimensional

¿Cuál es la distancia que existe entre los puntos $P_1 = -6$ y $P_2 = 8$, sabiendo que los puntos están colocados en una recta vertical?

Ejemplo 3: Distancia bidimensional

¿Cuál es la distancia entre los puntos $A(6,3)$ y $B(3,-1)$?

Demuestra que el triángulo ABC formado por los puntos $A(-1,-3)$, $B(6,1)$ y $C(2,-5)$ corresponde a un triángulo rectángulo.

División de un segmento en una razón dada

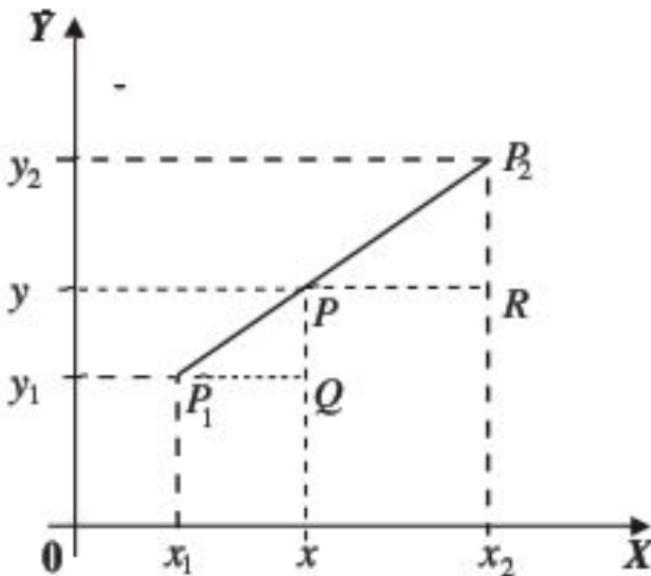
Es el resultado de la comparación de dos cantidades, con el objeto de saber cuantas veces la una contiene a la otra.

Dividir un segmento en una razón dada consiste en determinar una posición $P(x, y)$ que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en partes proporcionales.

Esta razón de proporcionalidad se define como:

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$$

Donde r es la "razón"



Por geometría los triángulos PP_1Q y P_2PR son SEMEJANTES, por lo tanto, la proporcionalidad que existe entre sus lados es:

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{P_1Q}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{QP}}{\overline{RP_2}}$$

Por otro lado, sabemos que las longitudes de los lados de los triángulos son:

$$\overline{P_1Q} = x - x_1$$

$$\overline{QP} = y - y_1$$

$$\overline{PR} = x_2 - x$$

$$\overline{RP_2} = y_2 - y$$

Entonces:

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

Por lo tanto, para determinar la razón dados los extremos P_1 y P_2 y el punto de división P , se usa:

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

o

$$r = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

Y para encontrar la coordenada (x, y) del punto de división P , dados los extremos y la razón se utiliza:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$$

y

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

Ejemplo 4: Cálculo de la razón

¿Cuál es la razón en la que el punto $P(2,7)$ divide al segmento de recta determinado por los puntos $P_1(-1,1)$ y $P_2(6,15)$?

Ejemplo 5: Coordenadas del punto que divide a un segmento

Determina las coordenadas del $P(x, y)$ que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en una razón $r = \frac{2}{7}$, y cuyos extremos son los puntos $P_1(0,3)$ y $P_2(7,4)$

Actividad 1: Plano cartesiano y distancia entre dos puntos.

I. Escribe una V si el enunciado es verdadero o una F si el enunciado es falso.

a) El plano cartesiano se encuentra dividido en cuatro cuadrantes	
b) Los ejes coordenados de un plano cartesiano son perpendiculares	
c) El eje coordenado "y" corresponde al eje de las abscisas	
d) El punto A(3,8) tiene por ordenada 8	
e) La abscisa y la ordenada pueden ser positivas, negativas o cero	
f) La distancia entre dos puntos ubicados en el plano cartesiano no puede determinarse	

II. Escribe verdadero o falso según corresponda, no olvides justificar.

Proposición	¿Es verdadera?	Justificación
Si un punto tiene ordenada 0 entonces está sobre el eje "y"		
La distancia entre $(a+b,0)$ y $(a-b,0)$ es $2b$		
Si un punto tiene ordenada -3 y está sobre el eje "y" entonces el punto es $(0,-3)$		
La distancia entre los puntos (a,b) y $(0,0)$ es $a+b$		

- III. Grafica y determina el perímetro del triángulo cuyos vértices son: $A(1,2)$, $B(5,3)$ y $C(-3,-6)$
- IV. Grafica y verifica que los puntos $P(-2,-3)$, $Q(-4,-5)$ y $K(-1,-6)$, son los vértices de un triángulo isósceles
- V. Los extremos del diámetro de una circunferencia son los puntos $P(4,-2)$ y $Q(-3,-1)$
- VI. Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud 5 es el punto $P(3,-2)$. Si la abscisa de un extremo es 6. Hallar su ordenada.
- VII. Representa gráficamente y responde: ¿Cuál es la razón en la que el punto $P(10,7)$ divide al segmento de recta cuyos extremos son los puntos $Q(-5,2)$ y $K(1,4)$
- VIII. Representa gráficamente y determina las coordenadas del punto P que dividen al segmento $A(1,4)$ y $(-3,2)$ en la razón $r = \frac{1}{2}$